

## バスレフ型スピーカーシステムのシミュレーション

S. Suzuki

2008年5月6日

改定 2008年5月24日

バスレフ型スピーカーシステムは、最も普及した形態であり、設計のしやすさやコストパフォーマンス比等で有利なシステムである。しかし、バスレフ型についてあまり詳細に検討した例は多くないように思う。ここでは、バスレフ型の運動方程式について数値解法を実施し、実際の動きをシミュレーションする。

### [1] バスレフ型及びその発展型のスピーカーシステムの運動方程式とその解法

バスレフ型及び MCAP 型をはじめとする発展型も、運動方程式は、同様の線型微分方程式の形にまとめられる。このことは力学の世界では常識であろうと考えられるが、音響の世界ではあまり追求されていないように思われる。発展型を含むバスレフ型スピーカーシステムの運動方程式は、行列形式で下記のように表される。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

(1)式において、 $\mathbf{M}$  は質量行列、 $\mathbf{C}$  は減衰項を表す行列、 $\mathbf{K}$  は剛性行列を表す。また、 $\mathbf{x}$  は各質点の変位を表すベクトルであり、上に付けた『 $\cdot$ 』は、時間微分を表す。また右辺は、強制振動を表すベクトルである。

(1)式の項の中で、減衰項は、特定が難しいが、その他の項については、比較的簡単に求めることができる。(1)式を差分式で表示すると、(2)式ようになる。

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{x}^{j+1} - 2\mathbf{x}^j + \mathbf{x}^{j-1}}{\delta^2} + \mathbf{C} \left( \frac{\mathbf{x}^{j+1} - \mathbf{x}^{j-1}}{2\delta} \right) + \mathbf{K}\mathbf{x}^j = \mathbf{f}(\omega \cdot \delta \cdot j) \quad (2)$$

ここで、 $\delta$  は、時間刻みのステップ幅を表し、 $j$  はステップ数を表す。

減衰項を無視し、 $\mathbf{C}=\mathbf{0}$  とすると、(3)式ようになる。

$$\mathbf{x}^{j+1} = (2\mathbf{E} - \delta^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}) \mathbf{x}^j + \mathbf{x}^{j-1} + \delta^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}(\omega \cdot \delta \cdot j) \quad (3)$$

但し、中央差分を実施するものとし、差分式は、下記のように定義する。

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \approx \frac{\mathbf{x}^{j+1} - 2\mathbf{x}^j + \mathbf{x}^{j-1}}{\delta^2}$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \approx \frac{\mathbf{x}^{j+1} - \mathbf{x}^{j-1}}{2\delta}$$

ここでは、(3)式の漸化式を用いて、1ステップ毎に、順次計算してゆくことによりシミュレーションを行う。

## [2] バスレフシステムの強制振動モデル

バスレフシステムは、図1の等価力学モデルで表すことができる。

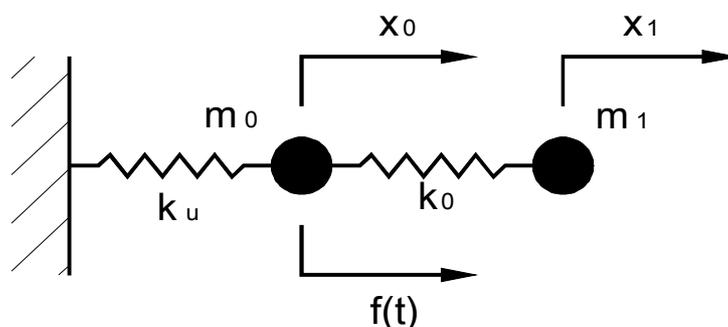


図1 バスレフシステムの等価力学モデル

図1の左側の●は、スピーカユニットの振動系の質量、右側の●は、ダクトの振動系の質量を表す。また、左側のばね  $k_u$  は、スピーカユニット単体のサスペンションでありこれはフレームに固定されている。右側のばねは、キャビネットの空気ばねであるが、空気ばねの強さは、変位する部分の面積の二乗に比例するので、スピーカユニット側とダクト側では値が異なる。このため、スピーカユニット側から見たばね定数を  $k_{01}$ 、ダクト側から見たばね定数を  $k_{01}$  としてある。

図1における、各定数、変数は下記通り定義する。

- $k_u$ : スピーカユニット単体のばね定数[N/m]
- $k_0$ : バスレフキャビネットの基準振動板面積に対するばね定数[N/m]
- $a_0$ : スピーカユニット振動板の有効面積(基準振動板面積)[m<sup>2</sup>]
- $a_1$ : ダクトの断面積[m<sup>2</sup>]
- $r_1$ : ダクト断面積の基準面積に対する比( $a_1/a_0$ )
- $m_0$ : スピーカユニットの周囲の空気を含む振動系の質量[kg]
- $m_1$ : バスレフダクト内部と周囲の空気を含む振動系の質量[kg]
- $f(t)$ : アンプによる駆動力[N]
- $x_0$ : スピーカユニットの代表点の変位[m] (矢印は正の方向を示す)
- $x_1$ : ダクト内と周囲の空気の代表点の変位[m] (矢印は正の方向を示す)

ここで、スピーカユニットの強制振動の運動方程式は(1)式の形に表されるが、簡略化のため減衰項を無視して、詳細を書くと(4)式のようになる。

$$\begin{cases} m_0 \frac{d^2 x_0}{dt_2} + k_u x_0 + k_0 x_0 - k_0 \frac{a_1}{a_0} x_1 = f(t) \\ m_1 \frac{d^2 x_1}{dt_2} + k_0 \frac{a_1^2}{a_0^2} x_1 - k_0 \frac{a_1^2}{a_0^2} \frac{a_0}{a_1} x_0 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

(4)式は(4)'式のように書き直すことができる。

$$\begin{cases} m_0 \frac{d^2 x_0}{dt_2} + (k_u + k_0) x_0 - k_0 r_1 x_1 = f(t) \\ m_1 \frac{d^2 x_1}{dt_2} - k_0 r_1 x_0 + k_0 r_1^2 x_1 = 0 \end{cases} \quad (4)'$$

(4)'式を行列形式に書き直し、また、時間の導関数を" $\cdot$ "で表記すると(5)式のようになる。

$$\begin{bmatrix} m_0 & 0 \\ 0 & m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{x}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_u + k_0 & -k_0 r_1 \\ -k_0 r_1 & k_0 r_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここで、シミュレーションのために導関数を、中央差分型の差分式に置き換える。但し、 $\delta$  は、離散時間の分割幅[s]とし、 $j$  は離散時間とする。また、変位の離散表現は下記のようにする。

$$x_0 = x_0^j$$

$$x_1 = x_1^j$$

(5)式は、差分形に置き換えると(4)式の通りとなる。

$$\begin{bmatrix} \frac{m_0}{\delta^2} & 0 \\ 0 & \frac{m_1}{\delta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0^{j+1} - 2x_0^j + x_0^{j-1} \\ x_1^{j+1} - 2x_1^j + x_1^{j-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_u + k_0 & -k_0 r_1 \\ -k_0 r_1 & k_0 r_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0^j \\ x_1^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

(6)式を帰納式型に整理すると(7)式のように書き直される。(7)式は、(3)式の各行列を計算したものである。

$$\begin{bmatrix} x_0^{j+1} \\ x_1^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \frac{\delta^2(k_u + k_0)}{m_0} & \frac{\delta^2 r_1 k_0}{m_0} \\ \frac{\delta^2 k_0 r_1}{m_1} & 2 - \frac{\delta^2 r_1^2 k_0}{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0^j \\ x_1^j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0^{j-1} \\ x_1^{j-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\delta^2}{m_0} f^j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで、初期条件を定め、また、強制振動の信号を定義することにより、順次計算することができ、初期値問題の解が得られる。実際には数値計算の誤差があるため、変位の平均がゼロになるよう補正するアルゴリズムが必要になるが、計算する時間をほぼ定常状態に達する1秒程度とした場合には、(7)式をそのまま使用しても実用上は問題なかった。

初期条件は、振動板及びダクトの変位及び初速度がゼロであるとする、下記の通りに表記できる。

$$\begin{bmatrix} x_0^{-1} & x_0^0 \\ x_1^{-1} & x_1^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

強制振動は、周波数を  $F$  とすると、 $f(t) = f_A \sin(2\pi Ft)$  となるため、差分形では、(8)式のように書き表される。ここで、 $f_A$  は、振幅の大きさ[N]とする。

$$f^j = f_A \sin(2\pi F \delta \cdot j) \tag{8}$$

(8)式を(7)式に代入すると、(9)式のようになる。

$$\begin{bmatrix} x_0^{j+1} \\ x_1^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \frac{\delta^2(k_u + k_0)}{m_0} & \frac{k_0 r_1 \delta^2}{m_0} \\ \frac{k_0 r_1 \delta^2}{m_1} & 2 - \frac{k_0 r_1^2 \delta^2}{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0^j \\ x_1^j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0^{j-1} \\ x_1^{j-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\delta^2}{m_0} f_A \sin(2\pi F \delta \cdot j) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

(10)式は、漸化式の形になっているので、各周波数  $F$  ごとに、 $j=1, 2, 3, \dots$  として順次計算すれば、変位の量を時系列に計算できる。

### [3] シミュレーションの例

以下に、実際のシミュレーションを行う。バスレフに最も適しているのは、公称 6.5"のスピーカユニットだと思うので、手元に資料のある、FE166  $\Sigma$  についてシミュレーションを実施する。

シミュレーションするために必要な FE166  $\Sigma$  の仕様は、表 1 の通りである。

表 1 FE166  $\Sigma$  の仕様

規格	値	備考
最低共振周波数	50[Hz]	
$m_0$	0.0069[kg]	6.9[g]
実効面積 $a_0$	0.013273[m <sup>2</sup> ]	実効振動半径=6.5[cm]

FE166  $\Sigma$  の仕様から、ユニットのばね定数  $k_u$  は、下記の通りに計算される。

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_u}{m_0}} \tag{11}$$

よって、

$$k_u = 4\pi^2 f_0^2 m_0 \quad (12)$$

以上から、 $k_u=681.00[\text{N/m}]$ となる。

FE166Σの標準エンクロージャーは、取扱説明書によると、内容積  $250=0.025[\text{m}^3]$ 、ダクト寸法(H×W×L)は、 $60\text{mm} \times 110\text{mm} \times 135\text{mm}$  となっている。ダクトの長さについては、長岡の著書にある通り実効半径の0.7倍を加算すると、 $167\text{mm}$ となるので、これを元に振動系の質量を計算する。

以上から、 $a_1 = 0.00660[\text{m}^2]$ 、 $m_1 = 0.001323[\text{kg}]$ となる。

また、その他の定数は下記の通りとなる。

$$k_0 = \frac{\gamma \cdot a_0^2 P}{V} = \frac{1.4 \times 0.01327^2 \times 101,300}{0.025} = 998.94[\text{N/m}] \quad (13)$$

離散時間の刻みは、ここでは、 $\delta=0.00001[\text{s}]$ とする。こうすれば、 $100\text{Hz}$ の場合、1周期を1000分の1に分割できるので、 $100\text{Hz}$ 以下の計算には支障がないものとする。問題は、アンプの駆動力である  $f_A[\text{N}]$ であるが、スピーカーユニットが壊れないであろうと想像できる  $0.1[\text{N}]$ としてみる。これは、アンプの出力を一定とする条件とは異なるので注意を要する。以上で、パラメータが全て決定された。これを表2に示す。

表2 各パラメータの値

パラメータ	記号	値	単位
スピーカーユニットの実効面積	$a_0$	0.01327	$[\text{m}^2]$
バスレフダクトの断面積	$a_1$	0.006600	$[\text{m}^2]$
ダクト面積の振動板面積に対する比	$r_1$	0.00497362	$[-]$
スピーカーユニット振動系の実効質量	$m_0$	0.006900	$[\text{kg}]$
ダクト振動系の実効質量	$m_1$	0.001323	$[\text{kg}]$
スピーカーユニットのばね定数	$k_u$	681.0	$[\text{N/m}]$
スピーカーキャビネットのスピーカーユニットに対するばね定数(括弧内は等温条件)	$k_0$	998.94 (713.53)	$[\text{N/m}]$
アンプの駆動力の振幅	$f_A$	0.1	$[\text{N}]$
離散時間の幅	$\delta$	0.00001	$[\text{s}]$

キャビネットのダクトの共振周波数は、スピーカーユニットと関係なく定まり、次式のようになる。

$$f_D = \frac{r_1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_0}{m_1}} = 68.8[\text{Hz}] \quad (14)$$

但し、(13)式は、断熱の条件で計算したものであり、スピーカーの教科書に載っている公

式とは、値が若干異なる。例えば、長岡の『最新オリジナルスピーカー工作 20』式を用いて計算すると、60.7[Hz]となり、(14)式より低い値となる。因みに、等温の条件を用いると、58.1[Hz]となり、長岡が用いている式に近い値となる。既に、MCAP の計算式の説明で述べたように、学術的には説明が付きにくい、等温の条件のほうが実際に近いのかもしれない。

従って、シミュレーションは断熱条件ではなく等温条件で実施することにし、表 2 の  $k_0$  は、()内の値を使用する。

シミュレーションを実施するためには、特殊なソフトウェアは必要なく、フリーウェアの Open Office Calc を使用して順次表計算を行えばよい。

図 1 は、Open Office Calc を使用した計算のための画面を示す。この例では、B 列の 1 ~11 行に各パラメータの値を定義し、D4、E4、D5、E6 に(3)式の右辺第一項の各要素を計算式で入力している。A14 以下は離散時間のステップ数、B14 下は各離散ステップでの時間、C14 以下は強制振動の値、そして、D14、E14 以下は、各質点の変位を夫々のステップで計算したものである。また、時間ごとの変位の値が分れば、速度が分るため、速度ヘッドを圧力ヘッドに換算した値を、H14、I14 以下に計算して入れている。これを、音圧レベルに公式通りに dB 変換したものが、J14、K14 以下であるが、強制振動の入力のパワーが分からないため、参考値に過ぎない。

D14:E15 の範囲は、初期条件としてゼロを入力し、D16、E16 に(7)式の通りの計算式を入力する。そして、17 行以下に同じ計算式をドラッグして入力すれば、変位の値が計算される。音圧などは、変位の値から順次計算している。この計算には、勿論、Microsoft Excel 等の市販のソフトウェアを使用しても良いが、VBA を使用しないので、Calc で十分である。但し、Calc 2.4 を使用した場合、計算が、Excel 2000 を使用した場合よりも計算が遅かった。数多くの事例を計算する場合は、Microsoft Excel を使用したほうが良いかもしれない。プログラミングが得意な人は、Visual C++や Visual Basic 等を使用して、プログラムをコンパイルしたほうが更に計算が速くなるはずである。

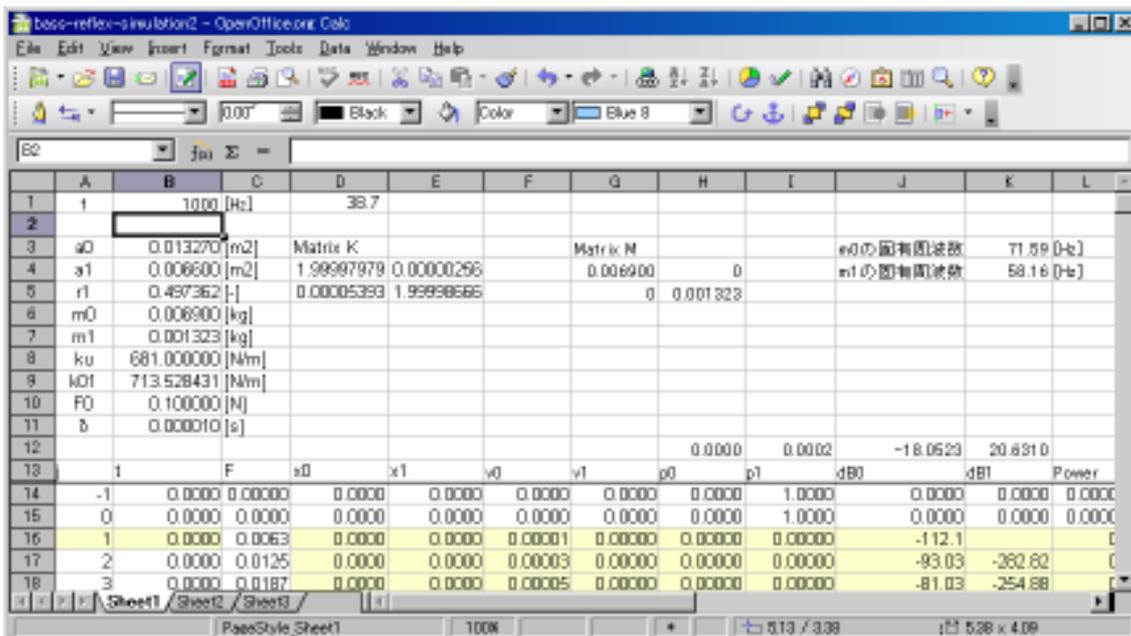


図1 シミュレーションの計算画面

このシミュレーション計算を実施することで、面白い結果が得られた。  
 先ず、図2A、Bに、計算上の $f_0$ での各質点の変位を示す。

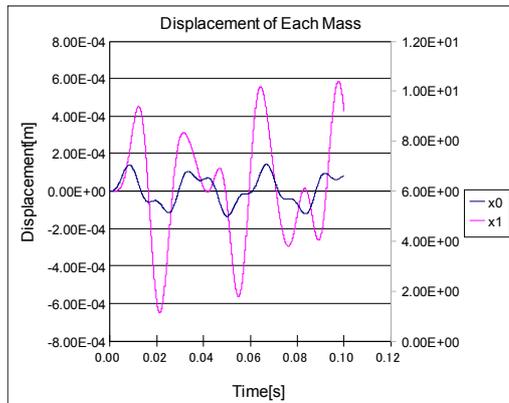


図2A 各質点の時系列変位(58.1Hz)

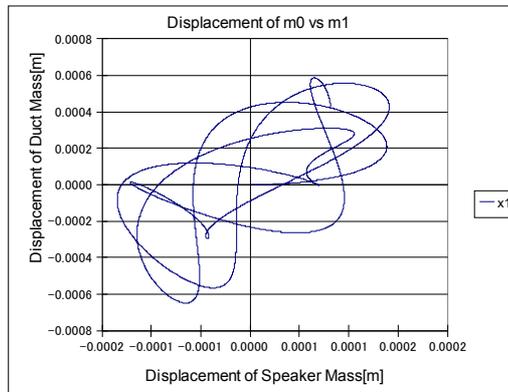


図2B 各質点の変位の散布図(58.1Hz)

ダクトの共振周波数においては、スピーカーユニットの変位（青色）の動きと、ダクトの空気（ピンク色）の動きが、逆相になるはずであるが、このシミュレーションの結果では、必ずしも逆相になっていない部分がある。しかし、逆相となっている部分もあり、また、スピーカーユニットの変位に対し、ダクトの変位が、面積比の逆数（約2倍）を超えて大きくなっている。このことは、振動板とダクトとが共振していると考えられる。図2Bは、各質点の変位を同じ時刻において、横軸と縦軸に夫々として、散布図にしたものである。意味有りげな軌道を描いているが、着目すべきところは、右上がりの部分が正相であり、左上がりの部分が逆相であるという点である。全体としてみれば右上がりの

ように見えるが、左上がりの部分が多い。右上がりの部分は、振動板の背面とダクトの空気が同相となり、結果として、スピーカーユニットの正面では逆相になって打ち消しあうことになる。左上がりであれば、ダクトの空気の変位が、振動板背面の変位の逆相になっているため、振動板の正面側では、夫々の音圧が同相となって強調されることになり、これが位相反転型と呼ばれる動作である。

同じシミュレーションを、強制振動の周波数を変えて実施すると、位相反転型の動作がよく分る。図3～5に周波数を変えてシミュレーションを実施したときの結果を図2と同様に示す。周波数は、共振周波数の58.2Hzより低い40Hz、高い80Hz、及び、系全体の固有振動を見るための1000Hzについてシミュレーションを実施した。1000Hzの場合は、殆どが中心付近の局部振動になると考えられるため、この結果は、実態を反映していないと考えられるが、系全体の固有振動の様子は良く示されている。

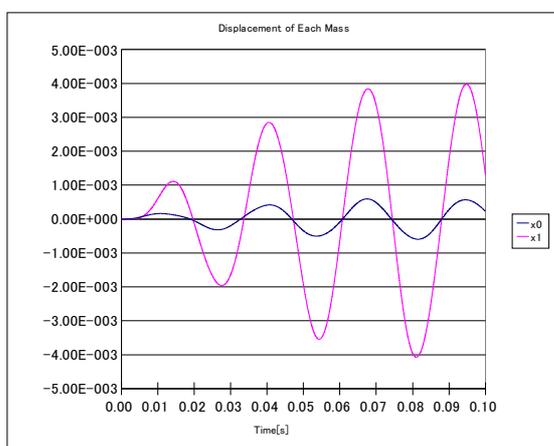


図 3A 各質点の時系列変位(40Hz)

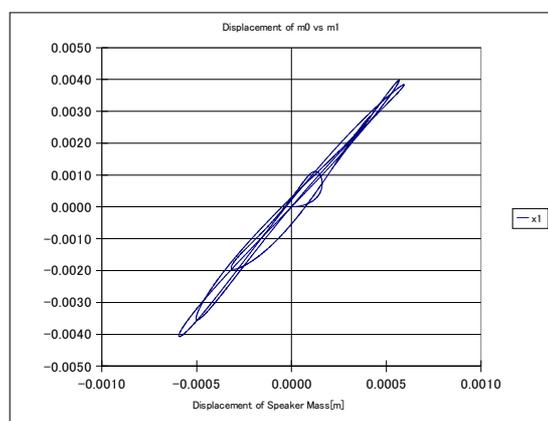


図 3B 各質点の変位の散布図(40Hz)

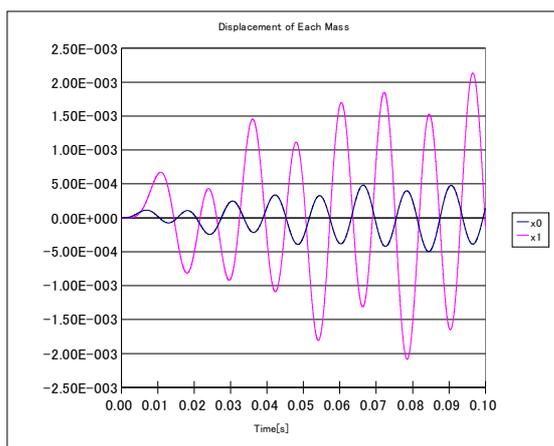


図 4A 各質点の時系列変位(80Hz)

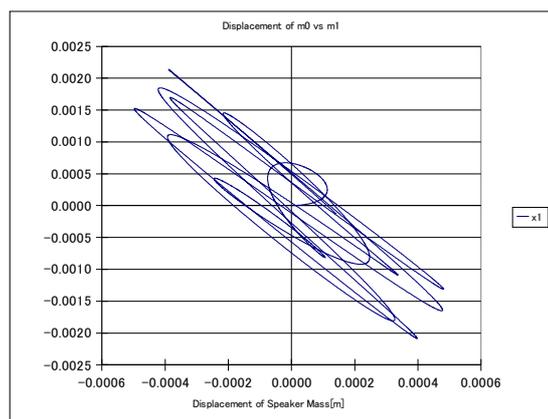


図 4B 各質点の変位の散布図(80Hz)

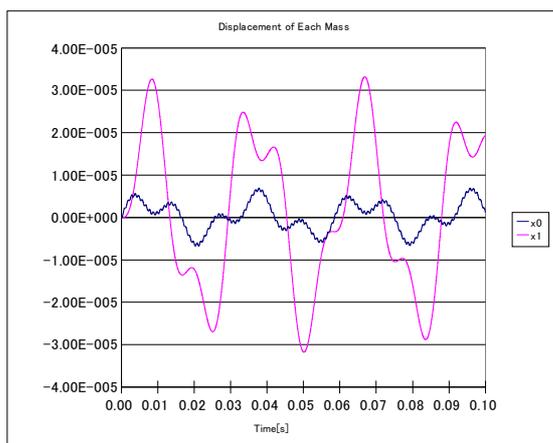


図 5A 各質点の時系列変位(1000Hz)

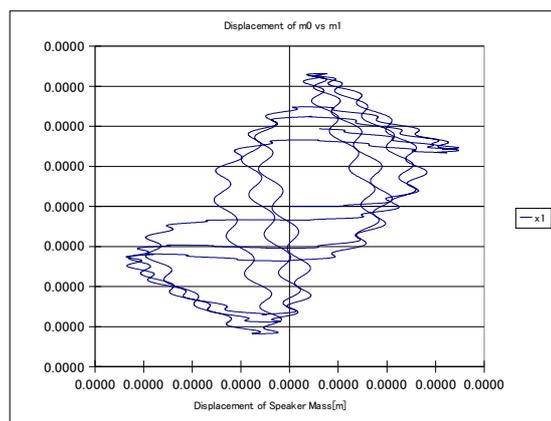


図 5B 各質点の変位の散布図(1000Hz)

共振周波数より小さな 40Hz では、各変位の位相がほぼ同相であり、結果として、打消しあってしまうことが分る。80Hz では、見事に逆相になっているが、変位の振幅は、ほぼ面積比の逆数であり、位相反転の動作はしているものの効果が強くないことが示される。

興味深いのは、1000Hz の場合で、振動板とダクトの固有振動のうえに加振周波数が細かく乗っているのに過ぎない。青色は、コーンの振動であり、ピンク色はダクトの振動を示している。これらの固有振動は、単一周波数成分ではなく、複数の周波数成分の和になっているため、この図から、周波数を特定することは難しい。例えば、山と山（または谷と谷）の間隔は一定ではないことが、複数の周波数の重ね合わせであることを示している。コーンの変位から敢えて代表的な固有振動の周波数を無理に数えると、0.1 秒の間に 8 周期と少しあるように見えるので、85Hz 位が固有振動の基本的な周波数となっているようであるが、各山と谷の周期が一定してはいないので、もう少し時間窓の幅を増やしてフーリエ変換を実施しなければ、断定的なことは云えない。簡単な計算では、71.6Hz が固有振動の周波数となるはずなので、上記の簡単な評価とシミュレーションの結果には少しずれがある。

同様に、ダクト側の固有振動の周波数を無理に数えると、40Hz 位と 80Hz 位の周波数の重ね合わせになっているように見える。これも、ダクトの計算上の共振周波数である 58.2Hz とは一致していない。この結果は、単にシミュレーションが誤っているのか、或いは、分析できていない別の要因があるのか、今後の課題である。

ここで示される固有振動は、スピーカー固有のノイズと云って良い。スピーカー単独では、信号を発生させないと考えられているが、実際には、何らかの信号を受けたときに、信号とは異った固有の振動を発生させるため、これが、ノイズとなる。このノイズの評価基準は示されていないが、研究が進めば、基準が示されるものと考えられる。

さて、上記の図 2～図 5 を見ても、ダクトの効果が分りにくいため、別の解析を実施した結果を示す。

このシミュレーション方法においては、コーン付近の音圧と、ダクトの音圧を計算することが可能なので、振動開始から 0.1 秒間の音圧の平均をとり、その差を、各周波数ごとに比較した。この結果を図 6 に示す。

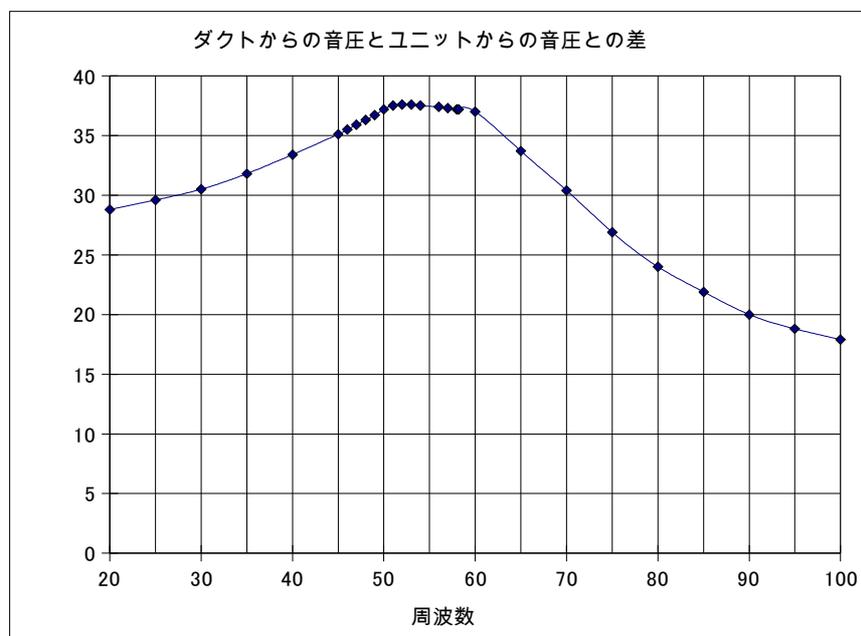


図 6 ダクト近傍の音圧とスピーカーユニット近傍の音圧の差

図 6 を見ると、50～60Hz 付近において、ダクト近傍の平均音圧が、スピーカーユニット近傍の音圧よりも特徴的に高くなっていることが示されている。ダクトの計算上の共振周波数である 58.2Hz は、この範囲に入っている。これは、前記の問題とは逆に、シミュレーションの正当性を示す根拠になり得る結果である。

#### [4] まとめ

バスレフシステムの動作については、運動方程式を数値的に解くことによりシミュレーションすることができた。この手法そのものは、バスレフ動作を発展させた方式には全て適用可能であるので、ダブルバスレフ、トリプルバスレフ、クオドラプルバスレフや MCAP 型の解析も可能である。更に、トリプルバスレフを MCAP のように放射状に並べたり、並列に配置された空気室を相互にダクトで繋いだ方式等、あらゆる方式についても計算可能である。

但し、結果の評価については、検討の必要があり、今後更に研究を進める必要がある。

以上