並列配置型小部屋構造(MCAP)スピーカシステムの固有振動を求める計算式

S. Suzuki

2008/03/23

1.　はじめに

並列配置型小部屋構造(MCAP: Multiple-Chamber Aligned in Parallel)型スピーカシステムの固有振動数を求めるためには、自由振動モデルの運動方程式を立て、その固有値を求める必要がある。ここでは、MCAP の運動方程式と、その解法について記す。求められた運動方程式の形はきれいにまとまるが、それを解くのは簡単ではない。MCAP 型スピーカシステムの固有振動の周波数の求め方については、Appendix-B に示す。

2.　MCAP 型スピーカの物理モデル

MCAP とは、並列配置型小部屋構造という名前の通り、主空気室に複数の副空気室を並列に接続して並べた構造である。副空気室が４つの場合を Fig.1 に示す。一般には副空気室の数を N とする。N については、N≧2 以上であれば MCAP の要件を満たす。

Fig.1 の中央が、ユニットを取付ける主空気室(Main Chamber)であり、そこに、ダクトを介して 4 個の副空気室(Sub-chamber)を接続している。更に、副空気室からは、外に向けたダクトを設けている。夫々の空気室は、空気ばね(spring)として作用し、一塊となったダクト内の空気が質量(mass)として、合計 8 自由度の振動系を構成する。従って固有振動数は、この場合は最大 8 個になる。

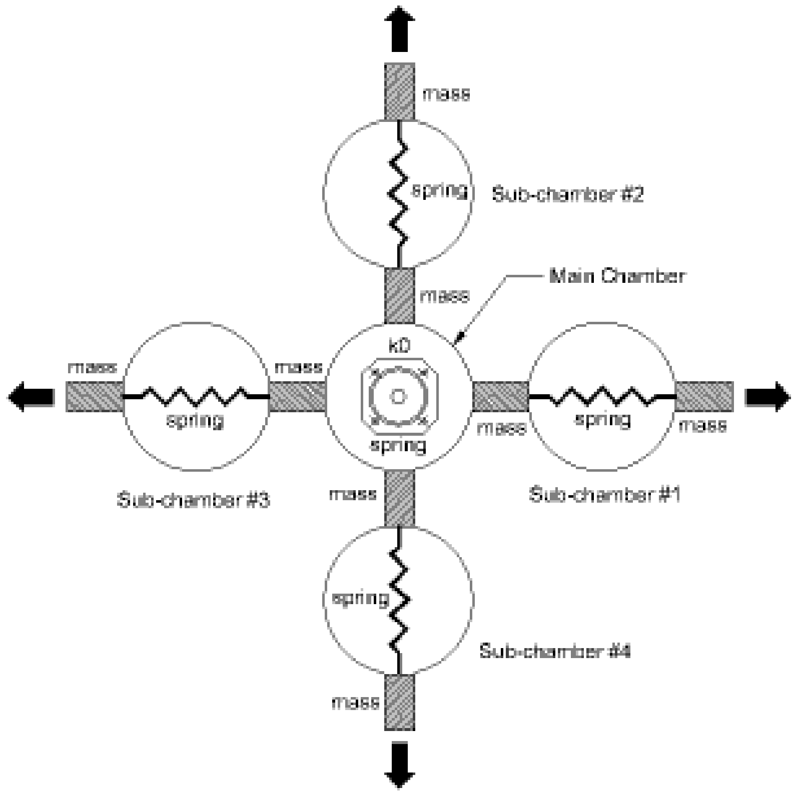

Fig.1　MCAP 構造(副空気室が 4 個の場合)

この方式の特徴は、副空気室数の最大 2 倍の固有振動数を持たせることができる点にある。外側に向けたダクトの全て使用する必要はないので、一部のダクトを塞いでチューニングすることもできる。

既に述べたように、副空気室の数は、2 個以上であれば良く、理論上は無制限であるが、実用的には、8 個程度が最大であろう。

3. MCAP 型スピーカシステムの物理モデルの基礎式

MCAP 型スピーカシステムは、固有振動数を複数持つバスレフ型である。従って、バスレフ型と同様に計算することができる。しかし、運動方程式が多少複雑になるので、まずは、通常のバスレフ型から順を追って記述する。

シングルバスレフの計算式

シングルバスレフは、Helmholtz の共鳴箱そのものの構造である。Helmholtz の共鳴箱は、空気室をばねとし、ダクト内の空気をひとかたまりの錘と考えたもので、原理は、ひとつのばねにひとつの錘を付けた単振動モデルである。これを Fig.2 に示す。ばねを用いた等価モデルは、重力を無視しているので横方向に書いている（以下同様）。モデルの式そのものには重力の影響はない。

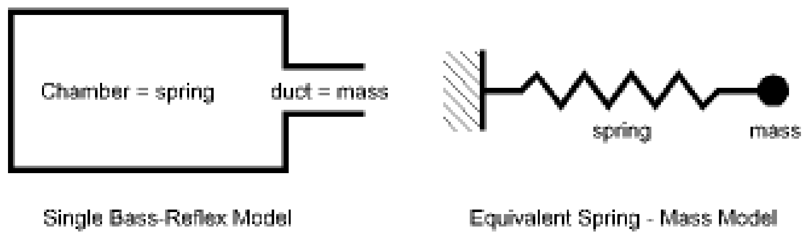

Fig.2　シングルバスレフのモデル

Helmholtz の共鳴箱の式は、理想気体の状態方程式から導くことができる。

理想気体の断熱条件での状態方程式は、(1)式で表される[1]。

$$PV^{\gamma} = \text{constant} \tag{1}$$

ここで、P および V は下記の通りとする。

P :　キャビネットの中の気圧（絶対圧力）[Pa]

V :　キャビネットの容積[m^3]

γ：　空気の比熱比(無次元)

(1)式から、

$$d\left(PV^{\gamma}\right) = V^{\gamma}dP + P\cdot\gamma V^{\gamma-1}dV = 0$$

両辺を $V^{\gamma-1}$ で割ると

$$VdP + \gamma PdV = 0$$

[1] (1)式は、断熱条件の状態方程式である。しかし、MCAP の場合は、等温条件（γ=1）として計算したほうが実測値に近かったため、実際には、等温の式を用いて固有振動数を求めている。断熱条件と等温条件については、文中に記載する。

すなわち、

$$dP = -\frac{\gamma P}{V} dV \qquad (2)$$

また、キャビネットを空気ばね、ダクトの中の空気を一塊の質点としたときの、フックの法則は(3)式で表される。

$$dF = -kdx \qquad (3)$$

但し、

k： 空気バネのバネ定数[N/m]

F: ダクト内の空気に働く復元力[N]

ここで

$$\begin{cases} dF = adP \\ dV = adx \end{cases} \qquad (4)$$

但し、

a: ダクトの断面積[m3]

となるので、(4)式を(3)式に代入すると

$$dF = -\frac{a\gamma P}{V} dV = -\frac{a^2 \gamma P}{V} dx$$

よって、空気のばね定数は次式で表される。

$$k = \frac{\gamma \cdot a^2 P}{V} \qquad (5)$$

因みに等温の条件では、空気のばね定数は、下記のようになる。

$$k = \frac{a^2 P}{V} \qquad (5)'$$

以上から、シングルバスレフシステムの固有振動数を求めることができ、固有振動の周波数は、次式で表される。空気のばね定数が求められると、ダクト中の空気の質量がわかれば固有振動の周波数が(6)式で求められる。因みに、等温の条件の場合、で求めた(6)'式のようになり、約 18%の差があるのだが、MCAP システムで実測値と比較したところ、等温条件の式で求めたほうが測定値に近かったため、MCAP では等温条件として計算した[2]。断熱条件と等温条件とでは、(5)式以外は共通であるので、どちらで計算する場合にも補正は簡単である。

$$f_D = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma \cdot a \cdot P}{\rho \cdot l \cdot V}} \quad [\mathrm{Hz}] \qquad (6)$$

$$f_D = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a \cdot P}{\rho \cdot l \cdot V}} \quad [\mathrm{Hz}] \qquad (6)'$$

但し、

[2] 元々、Newton は等温の条件で音速を計算していたが、実際の結果と合わなかったので、1816 年に Laplace が断熱の式で計算しなおして正しい音速を導き出したということである。しかし、MCAP の計算では、等温の式のほうが明らかに実測に近い計算結果が得られた。

$m = \rho \cdot a \cdot l$

m:　各ダクトにおいて一体となって振動する空気の質量[kg]

ρ：　空気の密度[kg/m^3]

l：　ダクトの相当長さ(ダクトの補正長さ)[m]

以上が、シングルバスレフの計算式であり、MCAP システム基本式である。

MCAP 型スピーカシステムの自由振動の運動方程式

MCAP の設計する際は、全て上記のシングルバスレフ(Helmholz の共鳴箱)の計算式を基にして、連成振動の方程式を立てて解けば良い。周波数特性を計算することは困難なので、固有振動数を決めることが、実際の設計になる。既に述べたように、計算には、一般に使用されている断熱条件の式ではなく、等温条件の式を用いている。

副空気室の数が 4 の場合の式を求めるための構造定義図を Fig.3 に示す。ここで、網がかかっている部分は、ダクトを示し、この中の空気が一体として質量を構成するものとする。x_1～x_8 は、塊として動くダクト内の空気の変位を表す。矢印は正と定義する方向を示す。また、k_0～k_8 は、基準となるダクトの面積に対する空気室のばね定数を表す。

尚、MCAP の基本仕様は、副空気室の数で表されるため、副空気室の数を N とし、添え字は次のような規則で付ける。

A)　主空気室の容量、ばね定数、スピーカユニットの実効面積の添え字は、0 を付ける。

B)　各副空気室の容量およびばね定数、主空気室から各副空気室に繋がるダクトに関する量には、順に、1,2,...,N の添字番号を付ける。

C)　各副空気室から、大気に開放するダクトに関する量には、N+1,N+2,...,2N の添字番号を付ける。

Fig.3 の場合は、N=4 なので、上記の規則に従って番号を付けた。

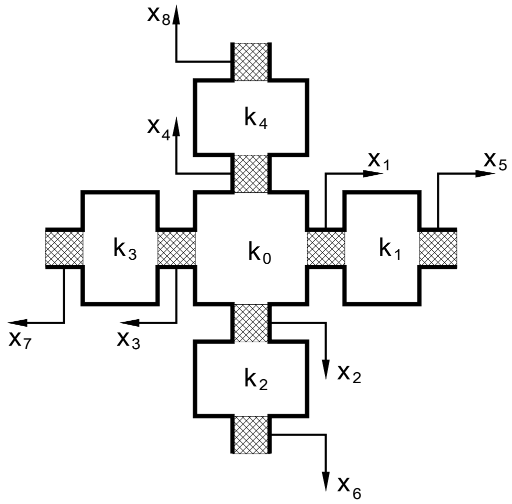

Fig.3　MCAP(副空気室 4 個の場合)の振動モデル

箱のばね定数 k は、ダクト面積の函数であるので、数式整理のため便宜上、ダクトの面積を、基準面積との比を使用して表す。基準面積は、振動板面積とし、a_0 で表すこととする。
ここで、各副空気室の容積を、夫々、$V_1, V_2, \ldots, V_N$ とすると、振動板面積に対するキャビネットのばね定数は、(7)式で表される。

$$k_j = \frac{a_0^2 P}{V_j} \tag{7}$$

ここでダクトの面積を、夫々 $a_1, a_2, \ldots, a_N, a_{N+1}, \ldots, a_{2N}$ とすると、夫々のダクトに対するキャビネットのばね定数は(8)式で表される。添字は、Fig.3 の x の添字のように主空気室と副空気室を繋ぐダクトの番号を 1,2,…,N とし、各副空気室から大気に開放したダクトの番号を N+1、N+2,…,2N とする。

$$k_j^* = \frac{r_j^2 a_0^2 P}{V_j} \tag{8}$$

但し、

$$r_j = \frac{a_j}{a_0}$$

Fig.3 の自由振動の運動方程式は、(9)式で表される、但し、x_j は、各質点の変位を表し、中心から外側向きを正方向とする。

$$\begin{cases} m_j \dfrac{d^2 x_j}{dt^2} + k_0 r_j \displaystyle\sum_{i=1}^{N} r_i x_i + k_j r_j \left(r_j x_j - r_{j+N} x_{j+N} \right) = 0 \\ m_{j+N} \dfrac{d^2 x_{j+N}}{dt^2} + k_j r_j \left(r_{j+N} x_{j+N} - r_j x_j \right) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

但し、　　　　N：副空気室の数（j = 1,2,..,N）

キャビネットを 0,1,2,3,4 (N=4)としたダクト 8 本の 8 自由度系について(9)式を行列形式で書くと(10)式のようになる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{KX} = \mathbf{0} \tag{10}$$

但し

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} (k_0+k_1)r_1^2 & k_0r_1r_2 & k_0r_1r_3 & k_0r_1r_4 \\ k_0r_2r_1 & (k_0+k_2)r_2^2 & k_0r_2r_3 & k_0r_2r_4 \\ k_0r_3r_1 & k_0r_3r_2 & (k_0+k_3)r_3^2 & k_0r_3r_4 \\ k_0r_4r_1 & k_0r_4r_2 & k_0r_4r_3 & (k_0+k_4)r_4^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -k_1r_1r_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2r_2r_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3r_3r_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4r_4r_8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_1r_5^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2r_6^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3r_7^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4r_8^2 \end{bmatrix}$$

但し、m はダクトの中で振動する空気の質量とする。即ち、$m_j = \rho \cdot a_j \cdot l_j$

但し、ρ は、空気の密度、l はダクトの相当長さを表す。

4. MCAP 型スピーカシステムの固有振動の解法

ここで、次式を解くと振動系の固有値を求めることができる。

$$\left| \mathbf{K} - \lambda \mathbf{M} \right| = 0 \tag{11}$$

または、

$$\left| \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \lambda \mathbf{E} \right| = 0 \tag{11'}$$

(11)式は、2N 次式になるので、解は 2N 個存在する（重解や虚数解もあり得る）。固有振動の周波数は(11)式のλを解いた後に、次式で表される。ここでω$_k$(k=1,2,…,2N)は各固有角振動数を表す。

$$f_k = \frac{\sqrt{\lambda_k}}{2\pi} = \frac{\omega_k}{2\pi} \tag{12}$$

以上で必要な式が全て求められた。 この後、(11)式を解いて固有値を求め、(12)式から固有振動の周波数を求める。(11)式を手計算で解くのは大変なので、数値計算プログラムを使用する。数値計算にしても簡単な方法はないので注意を要する。フレーム法のような直接解法では、誤差が大きく実用にならなかった。m を全て同じに設計すれば、ヤコビ法が使用でき、比較的計算が簡単になる。最も簡単だったのは、想定した振動数範囲について、(11)式の左辺の値を順次計算し、符号が逆転したところで近似解とする方法であった。詳細は、Appendix-B に示す。

以上が、MCAP 型スピーカシステムにおいて固有振動の周波数を求める計算式全てである。

Appendix -A

N=1 の場合（ダブルバスレフ）の計算例

副空気室の数が 2 個以上(N>1)の場合の計算には、専門知識が必要になるので、まず最初に、ダブルバスレフの場合の計算式を示す。ダブルバスレフの場合は、N=1 となりプログラムを用いなくとも固有振動数を計算できる。このとき、一般式の(9)は、下記のように単純化される。

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} + (k_0 + k_1) r_1 x_1 - k_1 r_1 r_2 x_2 = 0 \\ m_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} - k_1 r_1 r_2 x_1 + k_1 r_2^2 x_2 = 0 \end{cases} \tag{A1}$$

これを行列形式で書表すと、下記のようになる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{A2}$$

$$\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{A3}$$

(A3)式から固有方程式は下記のようになる。

$$\left| \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \lambda \mathbf{E} \right| = 0 \tag{A4}$$

ここで、各項は下記のように表される。

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} (k_0 + k_1) r_1^2 & -k_1 r_1 r_2 \\ -k_1 r_1 r_2 & k_1 r_2^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

実例として、長岡の DB-3[3]の場合について計算する。
DB-3 は、Table 1A、1B のような設計になっている。

Table1Ａ　主空気室

	W[m]	D[m]	H[m]	容積[m3]	容積[L]
空気室	0.224	0.194	0.155	0.006736	6.74
ダクト	0.070	0.070	0.111	-0.00054	-0.54
ユニットの排除容積(概算)				-0.00010	-0.1
合計				**0.006092**	**6.09**

Table 1B　副空気室

	W[m]	D[m]	H[m]	容積[m3]	容積[L]
空気室	0.224	0.194	0.480	0.02086	20.86
ダクト	0.075	0.075	0.060	-0.00034	-0.34
補強材	0.224	0.015	0.036	-0.00012	-0.12
合計				**0.020400**	**20.40**

[3] 長岡鉄男, "最新オリジナルスピーカー工作 20", 113-116 ページ, 音楽の友社 (1986)

ここで、固有値を求める方程式(A4)は、次式のようになる。

$$(k_{11}-\lambda m_1)(k_{22}-\lambda m_2)-k_{12}k_{21}=0 \qquad \text{(A5)}$$

方程式を整理すると、次式のように根の公式を使用できる形になる。

$$m_1 m_2 \lambda^2-(k_{11}m_2+k_{22}m_1)\lambda-k_{12}k_{21}+k_{11}k_{22}=0 \qquad \text{(A6)}$$

ダクトが存在する場合、m_1 も m_2 もゼロでないことは明らかなので、(A6)式を根の公式によって次式のように解を求められる。

$$\lambda=\frac{k_{11}m_2+k_{22}m_1 \pm \sqrt{(k_{11}m_2+k_{22}m_1)^2-4m_1m_2(k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21})}}{2m_1m_2} \qquad \text{(A7)}$$

よって、ダクトの固有振動の周波数は下記の通り求められる。

$$f_1=\frac{\sqrt{\lambda_1}}{2\pi}, \qquad f_2=\frac{\sqrt{\lambda_2}}{2\pi}$$

途中の計算を省略して結果だけ示すと、固有振動の周波数の高いほうから f_1=91.3Hz、f_2=45.2Hz となる。同文献には、近似式が紹介されており、これに基いて計算すると、fd1=94.0Hz、fd2=51.5Hz となり、上記の計算方法によって得られる結果に近い値となる。参考文献に近似式の原典は紹介されていないので導き方については不明であるが、等温条件と断熱条件の差によるものの他、各ダクトの連成を考慮していないためのモデル差があるものと考えられる。いずれも、実用上は十分な精度で計算できているものと考える。

Appendix-B

N≧2（4 自由度以上）の場合の計算方法

Appendix-A において、N=1（2 自由度）の場合には簡単に計算できることを示した。しかし、MCAP の場合、N≧2 でなければならない。N≧2 の場合は、固有値の計算は簡単ではないことが既に分かっている。詳細は、教科書類を見れば良いのであるが、固有値の計算方法は難解なうえに、プログラミングにも相当な手間がかかる。各種の計算を試みた結果、固有値を計算するのに最も簡単で実用的な方法について示す。

固有値は、(11)式の解であることが分かっている。しかし、(11)式を正確に解くことは上記の通り実用的ではないので、ここでは、下記の函数を考える。

$$G(\lambda)=\left|\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}-\lambda\mathbf{E}\right| \qquad (\mathrm{B}\ 1)$$

但し、

$$\lambda=\omega^2=4\pi^2 f^2 \qquad (\mathrm{B}\ 2)$$

f :　　周波数[Hz]

ω :　　角振動数[rad/sec]

よって、（Ｂ１）式を下記のように書き直し、周波数 f を想定した範囲内において函数G(λ)を計算し、f 軸を交差する値を固有振動の周波数とすれば良い。しかし、（Ｂ１）式の函数は、非常に絶対値の大きな値となり、数値計算誤差の影響が強くなるため、下記のように変形し、g(λ)を計算する。

$$g(\lambda)=\frac{m_1}{k_{11}}\cdot\frac{m_2}{k_{22}}\cdots\frac{m_L}{k_{LL}}\cdot G(\lambda)=\frac{m_1}{k_{11}}\cdot\frac{m_2}{k_{22}}\cdots\frac{m_L}{k_{LL}}\cdot\left|\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}-\lambda\mathbf{E}\right| \qquad (\mathrm{B}\ 3)$$

但し、

L = 2N

このようにして、g(λ)の値を順次求めてゆけば、g(λ)が 0 となる振動数を求めることができる。実用的には、1Hz 刻みで計算すれば十分であり、$g(\lambda_{i-1})\cdot g(\lambda_i)<0$ となったところを固有振動数とすれば、十分正確な値が求められる。Fig. B-1 に、N=3 の場合の計算例を示す。

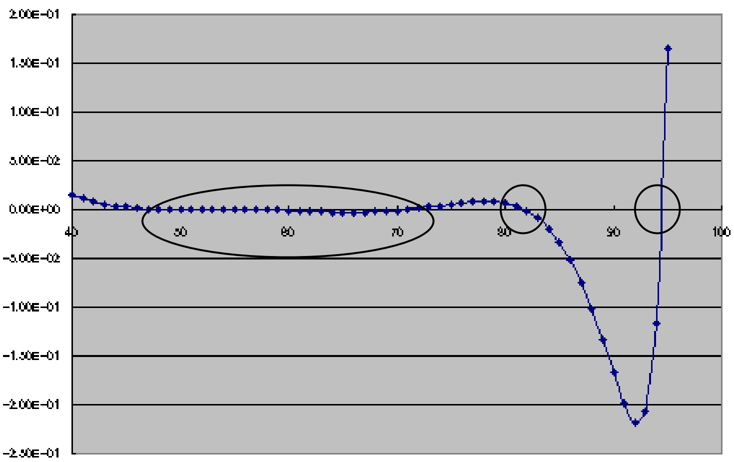

Fig. B-1　N=3 の場合の計算例

図 B-1 において、縦軸は g(λ)の値、横軸は周波数である。周波数は、1Hz おきに計算している。楕円で囲った部分に固有振動があるものと算定された。右の２つの楕円はこの図でも 0 となる周波数が明確であるが、左の横長の楕円部分では明確には分からない。この部分を拡大したものを、Fig. B-2 に示す。この結果、固有振動の周波数６つ全てを求めることができた。

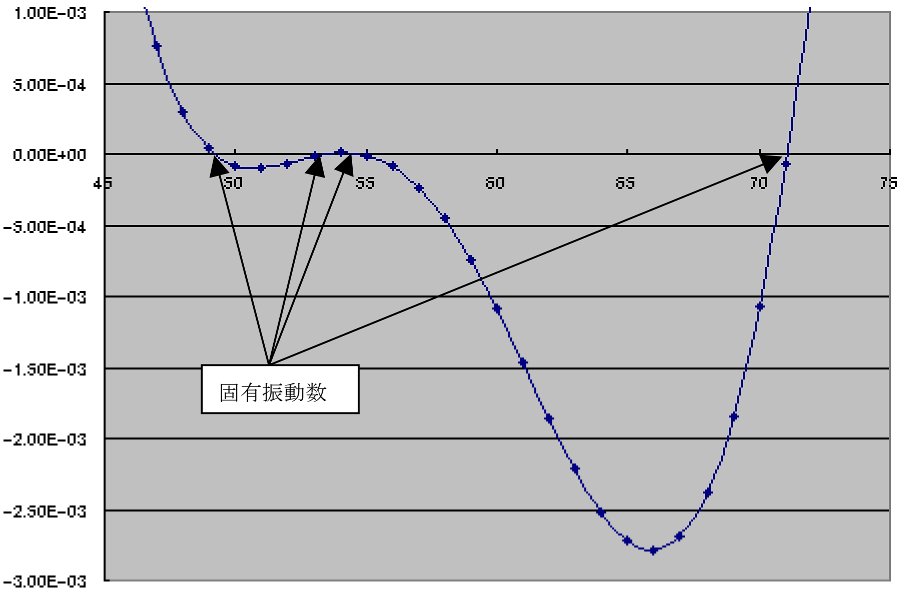

Fig. B-2 拡大図

本来は、 g (λ)は、λの６次関数となるはずである。変極点の数は６次関数と一致しているが、結果は多少複雑な形をしている。これは、数値の丸め誤差などが影響しているものと考えられる。これとは別に、６次関数の係数を直接求めるフレーム法があるので、プログラムを作成して計算してみたが、誤差が大きく実用にはならなかった。比較的簡単な固有値の計算方法は、ヤコビ法であるが、ヤコビ法を直接用いるためには、各ダクトの空気の質量を一定値にするという制約が付くことに注意する必要がある。

ここで記した方法は、いささか原始的であるが、高価なソフトウェアを用いたり、複雑な計算プログラムを作成したなくとも実用上十分な精度で MCAP 型スピーカシステムの固有振動の周波数を計算することができた。